Перейти к оглавлению на странице: 201

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§1. Примеры формализации задачи ЛП

Пример 1.1. Задача о диете.

Эта задача является классической иллюстрацией задач линейного программирования и фактически рассматривается при каждом изложении данного предмета. Пусть у врача-диетолога имеется n различных продуктов, которые обозначены через $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Из них он должен составить диету, т. е. определить количество каждого продукта, которое нужно потреблять ежегодно каждому „пациенту“или „группе пациентов“. Требуется, чтобы это годовое меню содержало определенное количество питательных элементов таких, как белок, калории, минеральные вещества, витамины и т. п. Мы будем считать эти типы питательных элементов просто питательными веществами, среди которых будет m различных веществ, обозначенных через $N_1, \ldots, N_m$. Предположим, что в год каждому „пациенту“необходимо по крайней мере β_1 единиц N_1, β_2 единиц N_2, и т.д., β_m единиц N_m. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям врач-диетолог должен точно знать, сколько питательных веществ содержится в каждом продукте. Обозначим через α_{ij} количество i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го продукта. Информацию, необходимую диетологу, удобно представить в виде следующей таблицы или матрицы

	F_1	F_2	$\ldots$	F_n
N_1	α_{11}	α_{12}	$\ldots$	α_{1n}
N_2	α_{21}	α_{22}	$\ldots$	α_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N_m	α_{m1}	α_{m2}	$\ldots$	α_{mn}

Элемент i-й строки и j-го столбца матрицы – число α_{ij} определяет количество питательного вечества N_i в единице продукта F_j. В дальнейшем будем называть эту таблицу матрицей питательности.

Предположим теперь, что диетолог уже выбрал диету. Это значит, что он определил, что в год каждый человек должен потреблять η_1 единиц продукта F_1, η_2 единиц продукта F_2 и т. д. Как он теперь проверит, что в этой диете удовлетворены требования питательности? Очевидно, он просто подсчитает количество каждого питательного вещества в диете и сравнит его с предписанным количеством. Рассмотрим питательное вещество N_i. В каждой единице F_1 содержится α_{11} единиц N_1, а поскольку в диете η_1 единиц продукта F_1, из F_1 мы получаем $\eta_1\alpha_{11}$ единиц N_1. Аналогично из продукта F_2 мы получаем $\eta_2\alpha_{12}$ единиц N_1 и, вообще говоря, из продукта F_j мы получаем $\eta_j\alpha_{1j}$ единиц N_1. Полное количество N_1, содержащееся в этой диете, будет

$$\eta_1\alpha_{11} + \eta_2\alpha_{12} + \ldots + \eta_n\alpha_{1n}.$$

Требуется, чтобы это количество было равно по меньшей мере β_1. Таким образом, потребность в питательном элементе N_1 просто означает, что числа $\eta_1, \ldots, \eta_n,\ \eta_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j\alpha_{1j} \geqslant \beta_1.$$

Требования на остальные питательные вещества принимают точно такую же форму, и условие удовлетворения диеты всем требованиям состоит в том, чтобы числа η_j удовлетворяли одновременно m неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j\alpha_{ij} \geqslant \beta_i,\ i = \overline{1, m}. \tag{1.1}$$

Диета, для которой выполнены условия (1.1), будет называться *допустимой диетой.*

Пока еще не было поставлено никакой задачи на максимум или минимум, предположим теперь, что диетолог должен выбрать из всех диет, отвечающих требованиям (1.1), наиболее экономную. Пусть каждому продукту сопоставлена некоторая цена. Пусть γ_j – цена единицы продукта F_j. Отсюда следует, что стоимость диеты, описанной набором $(\eta_1, \ldots, \eta_j, \ldots \eta_n)$ (вектором $(y = \eta_1, \ldots, \eta_j, \ldots \eta_n)$), определяется выражением

$$\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \ldots + \gamma_n\eta_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\eta_j. \tag{1.2}$$

Теперь мы можем дать точную формулировку задачи о диете: среди всех диет, удовлетворяющих условиям (1.1), найти ту, при которой выражение (1.2) достигает минимума.

Диета, удовлетворяющая (1.1) и минимизирующая (1.2), называется оптимальной. Задачу о диете можно в математическом отношении разделить на две части: первая - описание множества допустимых диет и вторая - если допустимые диеты существуют, нахождение оптимальной диеты. Легко видеть, что допустимые диеты будут существовать всегда, при условии, что каждое питательное вещество N_i имеется хотя бы в одном продукте F_j. Тогда, используя достаточное количество этого продукта, можно всегда удовлетворить потребности.

Пример 1.2. Транспортная задача.

Пусть некоторый вид продукции, например сталь, производится на каждом из m заводов $P_1, \ldots, P_m$ и пусть σ_i – ежегодный выпуск стали на i-м заводе. Предположим далее, что сталь требуется на каждом из n рынков $M_1, \ldots, M_n$ и пусть ежегодная потребность j-го рынка равна δ_j. Наконец, пусть γ_{ij} – стоимость перевозки единицы товара с завода P_i на рынок M_j.

Задача состоит в том, чтобы определить такой план перевозок, при котором:

1. был бы удовлетворен спрос δ_j на рынке M_j;
2. не было бы превышено предложение σ_i завода P_i;
3. была бы минимальной полная стоимость перевозок

План перевозок состоит просто из mn неотрицательных чисел ξ_{ij}, где ξ_{ij} представляют собой количества продукции, которые должны перевозиться из P_i на M_j. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_{ij}$ – полное количество продукции, привозимой на рынок – M_j и условие 1. обращается в неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} \geqslant \delta_j. \tag{1.3}$$

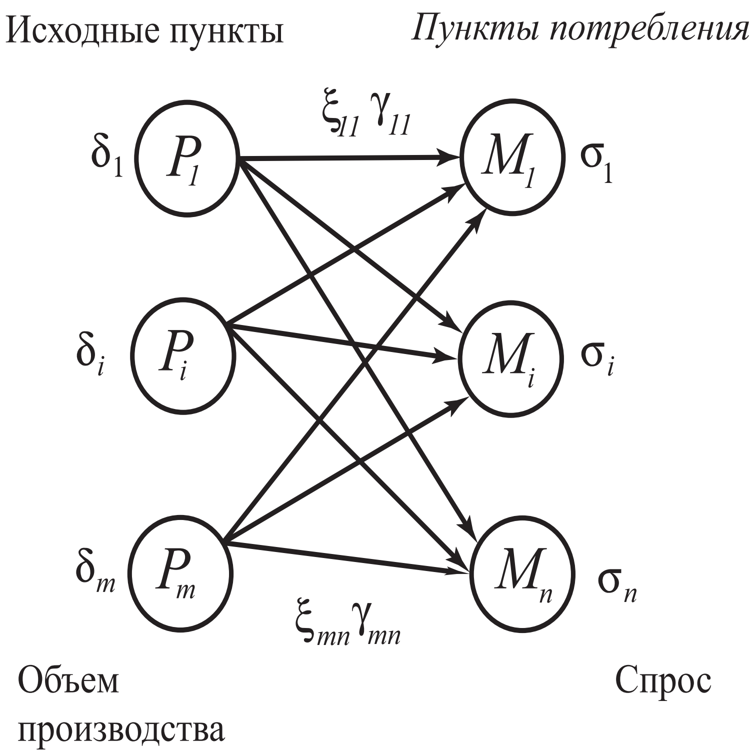

Рис.1.1.Транспортная сеть.

Полное количество продукции, вывозимое из P_i, равно $\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_{ij}$, таким образом, второе условие эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} \leqslant \sigma_i. \qquad (1.4)$$

Суммарные издержки по перевозке вычисляется по формуле:

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}\xi_{ij}. \qquad (1.5)$$

В данной задаче необходимо минимизировать суммарные издержки по перевозке продукции. Таким образом этапы построения модели остаются теми же самыми. Ищутся некоторые неотрицательные числа ξ_{ij}, которые удовлетворяют системе линейных неравенств и минимизируют линейную функцию.

Рассмотрим еще один пример построения математической модели более подробно.

§2. Общая задача линейного программирования

С математической точки зрения задача линейного программирования (ЛП) – это задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции многих переменных при линейных ограничениях типа равенств (или неравенств), при этом среди линейных ограничений могут существовать ограничения на знак переменных. Общая задача ЛП максимизации может быть записана в виде:

$$\max\varphi = \max(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m); \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \xi_1 a_{1j} + \xi_2 a_{2j} + \ldots + \xi_m a_{mj} \leqslant \beta_j, & j = \overline{1,n}; \\ \xi_1 a_{1j} + \xi_2 a_{2j} + \ldots + \xi_m a_{mj} \leqslant \beta_j, & j = \overline{k+1,n}; \\ \xi_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,p},\ p \leqslant m, \end{cases} \tag{2.2}$$

Общая задача минимизации имеет следующий вид:

$$\min\varphi = \min(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m); \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \xi_1 a_{1j} + \xi_2 \alpha_{2j} + \ldots + \xi_m \alpha_{mj} \geqslant \beta_j, & j = \overline{1,k}; \\ \xi_1 \alpha_{1j} + \xi_2 \alpha_{2j} + \ldots + \xi_m \alpha_{mj} = \beta_j, & j = \overline{k+1,n}; \\ \xi_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,p},\ p \leqslant m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь

ξ_i – переменные задачи;
$\varphi = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m$ – целевая функция;
$\begin{matrix} \xi_1\alpha_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \geqslant \beta_j \\ \xi_1\alpha_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \leqslant \beta_j \end{matrix}$ – ограничение типа неравенства;
$\xi_1\alpha_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \beta_j$ – ограничение типа равенства;
$\xi_i \geqslant 0$ – условие неотрицательности переменной ξ_i (стандартное ограничение на знак переменной);
$\gamma_i,\ \alpha_{ij},\ \beta_j$ – заданные параметры.

Пример 2.1. Задача распределения ресурсов

Завод про производству строительных смесей изготовляет два вида продукции: строительные смеси для наружных работ (Тип 1) и строительные смеси для внутренних работ (Тип 2). Для производства строительных смесей используются два типа ресурсов гипс A и цемент B. Максимально возможные суточные запасы этих ресурсов составляют 12 и 6 т., соответственно. В таблице даны расходы гипса и цемента на 1т. соответствующих строительных смесей.

Исходный продукт производства	Расход ресурсов (в тоннах) на тонну строительной смеси		Суточный запас (в тоннах)
	Тип 1	Тип 2	
Гипс A	3	2	12
Цемент B	1	2	6

Таблица 1.1 Таблица расхода ресурсов.

Суточный спрос на строительную смесь второго типа никогда не превышает спроса на на строительную смесь первого типа более чем на 1т. Кроме того, спрос на строительную смесь второго типа никогда не превышает 2т. в сутки. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Известны оптовые цены одной тонны строительной смеси: 1000 руб. для строительной смеси первого типа, 3000 руб. для строительной смеси второго типа. Какое количество строительной смеси каждого типа должен производить завод, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Разобьем процесс построения модели на несколько частей.

- Определим, какие величины необходимо определить в модели (каковы переменные модели).
- Определим цель оптимизации.
- Определим каким ограничениям должны удовлетворять переменные.

Определение переменных – первый шаг в создании модели. После определения переменных построение ограничений и целевой функции обычно не составляет трудностей. Поясним эти построения. Здесь необходимо определить суточные объемы производства смесей для наружных и внутренних работ (смеси первого и второго типов). Обозначим эти объемы как переменные модели:

ξ_1 (в тоннах) – ежедневный объем производства строительной смеси первого типа (для наружных работ).

ξ_2 (в тоннах) – ежедневный объем производства строительной смеси второго типа (для внутренних работ).

Используя эти переменные строим целевую функцию, как суммарный ежедневный доход. Обозначим целевую функцию через z (в тыс. руб.) и положим $z = 1\xi_1 + 3\xi_2$, тогда завод в соответствии со своими целями стремится к

$$\max\varphi = \max(1\xi_1 + 3\xi_2).$$

Из вида выражения для z следует, что целевая функция, будет возрастать при увеличении ежедневных объемов производства смесей.

Перейдем к ограничениям, которым должны удовлетворять переменные модели ξ_1, ξ_2.

Ограничения на сырье могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Используемый объем}\\ \text{ресурсов для производства}\\ \text{обоих видов смесей}\end{array}\right) \leqslant \left(\begin{array}{l}\text{Максимально возможный}\\ \text{суточный запас ресурсов}\end{array}\right)$$

Из таблицы получаем

- ограничения на расход ресурсов

$$\begin{array}{rl} 3\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 12; & \text{(гипс A)} \\ 1\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 6; & \text{(цемент B)} \end{array}$$

- ограничения на спрос

$$\begin{array}{rl} -\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1; & \text{(спрос 1)} \\ \xi_2 \leqslant 2; & \text{(спрос 2)} \end{array}$$

- объем производства ни одного из видов продукции не может быть отрицательным, поэтому:

$$\begin{array}{l} \xi_1 \geqslant 0; \\ \xi_2 \geqslant 0; \end{array}$$

Перейти к оглавлению на странице: 201

Окончательно искомая задача линейного программирования (ЛП) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\max\varphi = \max(\xi_1 + 3\xi_2);\\
&3\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 12,\\
&\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 6,\\
&-\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1,\\
&\xi_2 \leqslant 2,\\
&\xi_1 \geqslant 0,\ \xi_2 \geqslant 0;
\end{aligned}$$

§3. Стандартная задача линейного программирования

Если в задаче максимизации ЛП все ограничения являются неравенствами типа $\leqslant$, а на все переменные наложено стандартное ограничение на знак $\geqslant 0$, то такая задача ЛП называется **стандартной задачей максимизации**:

$$\max\varphi = \max(c_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m); \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \xi_1 a_{1j} + \xi_2 a_{2j} + \ldots + \xi_m \alpha_{mj} \geqslant \beta_j, \quad j = \overline{1,n};\\ \xi_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Часто используется стандартная экономическая интерпретация для задачи максимизации. Фирма производит n видов продуктов (j- индекс вида продукта), используя при производстве m типов ресурсов (i – индекс типа ресурса), γ_i – прибыль от реализации единицы i -ого вида продукта; α_{ij} – потребности в ресурсе (i-ого типа для создания единицы продукта j-ого вида), β_j – запас ресурса i-го типа в плановый период, $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ – план выпуска продукции в заданный период. Тогда задача (3.1), (3.2) – может быть интерпретирована как задача нахождения плана производства $x^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)$, максимизирующего суммарную прибыль от реализации всех видов продукции в плановый период при ограниченных запасах ресурсов.

Если в задаче минимизации ЛП все ограничения являются неравенствами типа $\geqslant$, а на все переменные наложено стандартное ограничение на знак $\geqslant 0$, то такая задача называется **стандартной задачей минимизации**:

$$\min \varphi = \min(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m) \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \geqslant \beta_j, \quad j = \overline{1,n} \\ \xi_i \geqslant 0, \; i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3.4}$$

Здесь возможна следующая интерпретация пусть $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ - план выпуска продукции (ξ_i – объем выпуска продукции i-го вида). Вся произведенная продукция продается на m рынках. Обозначим через β_j – минимальные общие потребности в продуктах j-го рынка, α_{ij} – часть продукции i-го вида, продаваемая на j-ом рынке, γ_i – удельные затраты на производство продукции i-го вида. Тогда задача (3.3), (3.4) – может быть проинтерпретирована как задача нахождения плана производства $x^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)$, минимизирующего общие затраты при рыночных ограничениях на поставки продукции.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \\ &b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ &A = \{\alpha_{ij}\}, \\ &x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \\ &y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m), \\ &a_i - -\text{строка матрицы } A, \\ &a^i - -\text{столбец матрицы } A. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Используя новые обозначения (3.5) стандартную задачу линейного программирования можно записать в векторном виде:

$$\max \varphi = \max cx; \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} xA \leqslant b \\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\min \varphi = \min cx; \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} xA \geqslant b \\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

§4. Каноническая задача линейного программирования

Канонической называется такая задача ЛП, которая состоит в нахождении максимального или минимального значения целевой функции при условии, что все ограничения являются равенствами, а на все переменные наложено стандартное ограничение на знак $\geqslant 0$.

Каноническая задача линейного программирования имеет вид:

а) для задачи максимизации:

$$\max \varphi = \max(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m); \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \xi_1 a_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \beta_j, \quad j = \overline{1,n}; \\ \xi_j \geqslant 0, \ j = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.2}$$

а) для задачи минимизации:

$$\min \varphi = \min(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_m\xi_m); \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \xi_1 a_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \beta_j, \quad j = \overline{1,n}; \\ \xi_i \geqslant 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.4}$$

В векторном виде каноническая задача запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\max \varphi = \max cx; \\ &\begin{cases} xA = b \\ x \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\min \varphi = \min cx; \\ &\begin{cases} xA = b \\ x \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

§5. Эквивалентные преобразования

На практике общая задача линейного программирования должна быть приведена к одному из специальных видов. Это делается с использованием простых операций, которые называются эквивалентные формулировки. Обычно используются следующие эквивалентные формулировки.

- $\min\varphi = -\max(-\varphi)$
- $\xi_j \gtrless 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_i = \xi_i^+ - \xi_i^-, \\ \xi_i^+ \geqslant 0,\ \xi_i^- \geqslant 0 \end{cases}$
- $\xi_i \gtrless 0,\ j = \overline{1,n} \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_i = \xi_i^+ - \xi_0, \\ \xi_i^+ \geqslant 0,\ j = \overline{1,n},\ \xi_0 \geqslant 0 \end{cases}$
- $\xi_1\alpha_{ij}+\xi_2\alpha_{ij}+\ldots+\xi_m\alpha_{mj} \leqslant \beta_j, \Longleftrightarrow \xi_1\alpha_{ij}+\xi_2\alpha_{ij}+\ldots+\xi_m\alpha_{mj}+ s_i = \beta_j, s_i \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}$
- $\xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \geqslant \beta_j, \Longleftrightarrow \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} - s_i = \beta_j, s_i \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}$
- $\xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \beta_j, \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \leqslant \beta_j, \\ \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \geqslant \beta_j, \end{cases}$
- $\xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \beta_j, j = \overline{1,n} \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \leqslant \beta_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}(\xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj}m - \beta_j) \geqslant 0, \end{cases}$
  $$\Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} \geqslant \beta_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}(\xi_1\alpha_{ij} + \xi_2\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} - \beta_j) \leqslant 0, \end{cases}$$

§6. Примеры

Если исходное ограничение записано в виде такого неравенства

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 6,$$

добавляя слабую переменную к левой части ограничения, получаем

$$\xi_1 + 2\xi_2 + s_1 = 6,\ s_1 \geqslant 0.$$

Если же ограничения представлены неравенствами такого типа:

$$3\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 \geqslant 5,$$

вычитая из левой части неравенства слабую переменную

$$3\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 - s_2 = 5,\ s_2 \geqslant 0.$$

Если правая часть равенства отрицательна, ее всегда можно сделать неотрицательной, умножая обе части на (-1).

Если какая-то переменная ξ_i не имеет ограничения в знаке, ее можно представить как разность 2-х неотрицательных переменных

$$\xi_i = \xi_i' - \xi_i'',\ \xi_i', \xi_i'' \geqslant 0.$$

§7. Линейная алгебра

Рассмотрим пространство R^m, состоящее из векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$

Определение 7.1. Упорядоченный набор из m чисел называется вектором $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Число ξ_i называется i-й компонентой вектора x.

Определение 7.2. Единичным вектором в пространстве R^m является вектор, все координаты которого равны 1.

Определение 7.3. i-й орт есть вектор, i-я компонента которого есть 1, а остальные компоненты равны 0.

Определим теперь над векторами из пространства R^m две алгебраические операции.

Определение 7.4. Сложение. Если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ – m-мерные векторы, то их суммой $x + y$ называется вектор $(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_m + \eta_m)$.

Определение 7.5. Умножение на скаляр. Если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ – m-мерный вектор, λ - число, то произведением λx называется вектор $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_m)$.

Свойства сложения и умножения на скаляр.

Свойства сложения:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативный закон),
2. $x+y = y+x$ (коммутативный закон),
3. Для любых x и y существует такое z, что $x+z=y$ (обратимость сложения).

Свойства умножения:

1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивный закон для векторов),
2. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивный закон для скаляров),
3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативный закон для умножения на скаляр),
4. $1 \cdot x = x$ (существование единицы).

Перечисленные свойства можно рассматривать как аксиомы абстрактной алгебраической системы. Такие системы называются *векторными пространствами.*

Определение 7.6. Подмножество L векторного пространства R^m называется линейным подпространством или просто подпространством, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр, т. е. если

$$x, y \in L, \text{ то } x = y \in L, \tag{7.1}$$

$$x \in L, \lambda \in R^1, \text{ то } \lambda x \in L, \tag{7.2}$$

Определение 7.7. Векторы $x_1, \ldots, x_m$ из R^m называются линейно зависимыми или просто зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не равные нулю одновременно, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0.$$

Если таких чисел нет, то векторы называются независимыми.

Определение 7.8. Вектор y называется линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_n$, для которых существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

Замечание 7.1. Напомним геометрические рисунки, соответствующие этим определениям. В обычном трехмерном пространстве подпространства соответствуют плоскостям и прямым, проходящим через начало координат, а также самому началу координат 0. Два вектора линейно зависимы, если они лежат на одной и той же прямой; три эти вектора зависимы, если они расположены на одной и той же плоскости, проходящей через начало координат.

Теорема 7.1. *(основная теорема о векторных пространствах).* *Если каждый из векторов $y_0, y_1, \dots, y_n$ векторного пространства R^m является линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_n$, то векторы y_i зависимы.*

Доказательство.

Доказательство ведется индукцией по n. Если $n = 1$, то $y_0 = \lambda_0 x_1$, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Если и λ_0 и λ_1 равны нулю, то $y_1 = y_0 = 0$ и заключение следует немедленно. В противном случае предположим, например, $\lambda_0 \neq 0$. Тогда из того, что $\lambda_0 y_1 - \lambda_1 y_0 = \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_0 = 0 x_1 = 0$, мы получаем желаемую зависимость. Предположим теперь, что теорема справедлива для $n = k - 1$ и докажем ее для $n = k$. Из условия теоремы имеем

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} x_i, \ j = 0, \dots, k.$$

Если все числа λ_{ij} – равны нулю, то, как и ранее, доказательство получается непосредственно. Поэтому предположим, что хотя бы одно из чисел λ_{ij} – отлично от нуля. Пусть, например, $\lambda_{10} = 0$. Определим для $j = 0, \dots, k$

$$z_j = y_j - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{10}} y_0 = \sum_{i=2}^{k} \left(\lambda_{ij} - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{10}} \right)$$

Тогда каждый из k векторов z_j является линейной комбинацией $k-1$ векторов $x_1, \ldots, x_n$. Но по индуктивному предположению векторы z_j зависимы, т, е. существуют такие числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$, не все равные нулю, что

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \mu_j z_j = \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j - \frac{1}{\lambda_{10}} (\sum_{j=1}^{k} \mu_j \lambda_{ij} y_0),$$

а это показывает, что векторы y_j зависимы, как и утверждалось в теореме. ■

Следствие 7.1. *Любые $m+1$ векторов в пространстве R^m зависимы.*

Доказательство. Пусть u_i – орт, имеющий номер i. Тогда любой вектор x из R^m является комбинацией ортов u_i, так как если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, то $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i u_i$. Дальнейшее следует из теоремы 7.1.
■

Следствие 7.2. *Любая система m однородных линейных уравнений с $n+1$ неизвестными имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij} \lambda_j = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{7.3}$$

уравнения относительно неизвестных λ_j – с коэффициентами α^j. Пусть α_{ij} – n-мерные векторы: $a^j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$, где $j = 0, \ldots, n$. Это векторы из n-мерного пространства, и число их равно $n+1$. Значит, по следствию 1, они зависимы, так что существуют такие числа λ_j, не все равные нулю, что

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j a^j = 0.$$

Эти числа λ_j и определяют требуемое решение системы (7.3).

Отметим, что приведенное доказательство теоремы является конструктивным. ■

Определение 7.9. Пусть S – подмножество векторного пространства R^m. Рангом r подмножества S называется максимальное число независимых векторов, которые могут быть выбраны из S.

Если S имеет ранг r, то набор r независимых векторов множества S называется базисом S.

Линейное подпространство пространства R^m ранга $m-1$ называется гиперплоскостью.

Следствие 7.3. *Пространство R^m имеет ранг m.*

Доказательство.

Ранг R^m не превосходит m. С другой стороны, орты $u_1, \dots, u_m$ независимы, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а этот вектор равен нулю, только если λ_i для всех i. ■

Теорема 7.2. *(теорема о базисах). Набор независимых векторов $x_1, \dots, x_r$ множества S будет базисом S в том и только в том случае, когда любой вектор $y \in S$ является линейной комбинацией векторов x_i.*

Доказательство. Предположим, что любой вектор $y \in S$ является линейной комбинацией векторов x_i. Тогда S не содержит никакого большего набора независимых векторов, так как любой набор, состоящий более чем из r векторов, должен быть линейно зависимым, поскольку эти вектора являются линейной комбинацией вектора x_i. Таким образом ранг S равен r и векторы x_i составляют базис.

Обратно, предположим, что x_i образуют базис. Тогда по определению S имеет ранг r, так что, если $y \in S$, то векторы $x_1, \dots, x_r$ и y зависимы;

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i + \lambda y = 0,$$

где $\lambda \neq 0$. так как в противном случае векторы $x_1, \dots, x_r$ были бы зависимы. Таким образом получаем искомую линейную комбинацию:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i.$$

■

Теорема 7.3. *(теорема о ранге матрицы). Для любой матрицы строчечный и столбцовый ранги равны.*

Доказательство. Пусть r – строчечный ранг матрицы A, а s – ее столбцовый ранг. Предположим, что $r < s$. Выберем теперь базис множества строк матрицы A, который можно считать состоящим из строк $a_1, \ldots, a_r$ (изменение нумерации строк или столбцов A, очевидно, не влияет на ее строчечный или столбцовый ранги) и базис множества столбцов, состоящий из столбцов $a^1, \ldots, a^s$. Положим $\widehat{a}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{is})$ и отметим, что система уравнений

$$\widehat{a}_i y = 0, \;\; i = 1, \ldots, r. \tag{7.4}$$

в которую входят r уравнений с s неизвестными, имеет ненулевое решение $\overline{y}$. Кроме того, поскольку $a_1, \ldots, a_r$ – строчечный базис, из основной теоремы следует, что для r всех k существуют такие числа μ_{ik}, что $a_k = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_{ik} a_i$. Следовательно,

$$\widehat{a}_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} \widehat{a}_i, \tag{7.5}$$

таким образом, для всех k

$$\widehat{a}_k \overline{y} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} (\widehat{a}_i \overline{y}) = 0, \tag{7.6}$$

Записывая $\overline{y}$ как $\overline{y} = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_s)$, мы можем переписать (7.6) в виде

$$\sum_{j=1}^{s} \overline{\eta}_j a^j = 0. \tag{7.7}$$

Получающаяся зависимость между столбцами $a^j, j \leqq s$, противоречит предположению о том, что они образуют базис. Это противоречие показывает, что $r \geqq s$, и если заменить строки на столбцы, то аналогичная аргументация приведет нас к обратному неравенству. Этим и завершается доказательство. ■

Следствие 7.4. *Если векторы $a_1, \ldots, a_r$ являются независимыми в пространстве R^m, то, каковы бы ни были числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, существует такой вектор y, что*

$$a_i y = \alpha_i, \;\; i = 1, \ldots, r. \tag{7.8}$$

Доказательство. Пусть A – $r \times n$-матрица со строками $a_1, \ldots, a_r$. По теореме о ранге матрицы, столбцы a^j матрицы A имеют ранг r. Таким образом, если $a^1, \ldots, a^r$ – столбцовый базис, то у нас имеется r независимых векторов из – R^r и, следовательно, вектор $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ является по основной теореме их линейной комбинацией. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{r} \eta_j a^j$$

вектор, следовательно $y = (\eta_1, \ldots, \eta_r, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет уравнениям (7.8). ■

§8. Теорема об альтернативах

A

Основными вопросами являются: разрешимость линейных неравенств и существование решений системы линейных уравнений.

Определение 8.1. Пусть $x = (\xi_1, \ldots \xi_m) \in R^m$

Неотрицательность x означает, что $\xi_i \geqq 0$ для всех i и записывается как $x \geqq 0$.

Строгая положительность x означает, что $\xi_i > 0$ для всех i и записывается как $x > 0$.

Положительность x означает, что $x \geqq 0$, но $x \neq \mathbf{0}$ и записывается как $x \geqslant \mathbf{0}$.

Рассмотрим теперь задачу отыскания неотрицательного решения системы

$$xA = b. \tag{8.1}$$

Как и раньше, найдем условия, при которых система (8.1) не будет иметь решений. Очевидно, это будет в том случае, когда существуют такие числа $\eta_1, \ldots, \eta_n$, что $\sum \eta_j a^j \geqq 0$ и $\sum \eta_j \beta^j < 0$.

Действительно, для любого решения (8.8) Должно быть выполнено равенство
$$x\left(\sum \eta_j a^j\right) = \sum \eta_j \beta^j.$$
Однако правая часть этого равенства меньше нуля, а это противоречит тому, что левая неотрицательна.

Покажем система (8.1) действительно имеет неотрицательное решение. Точная формулировка этого утверждения такова:

Теорема 8.1. *(неотрицательные решения системы линейных уравнений). Имеет место ровно одна из следующих альтернатив: либо система*

$$xA = b, \;\; x \geqslant \mathbf{0} \tag{8.2}$$

имеет неотрицательное решение, либо имеют решение неравенства
$$Ay \geqq 0, by < 0. \tag{8.3}$$

Рассмотрим строчечные векторы a_i матрицы как точки в пространстве R^n. Множество всех неотрицательных линейных комбинаций векторов a_i образует конусообразную область C.

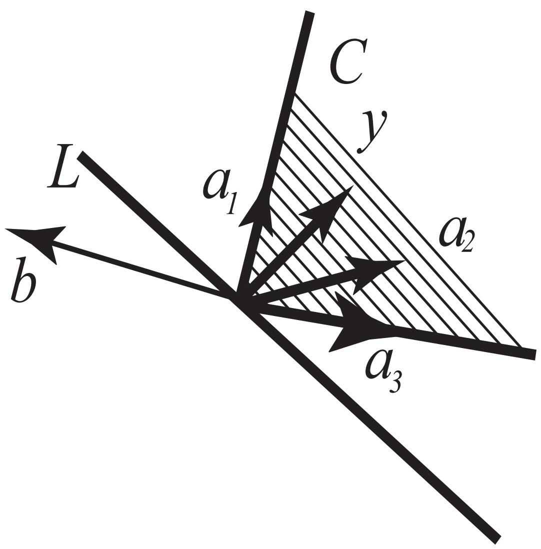

Рис. 8.1. Иллюстрация теоремы

Утверждение, что система (8.2) не имеет решения, означает, что вектор b не лежит в области C. В этом случае, по теореме 8.3, существует вектор y, который образует тупой угол с вектором b и нетупой угол с каждым из векторов a_i. Это значит, что точка b и конус C лежат по разные стороны гиперплоскости L, ортогональной вектору y. Поэтому эту теорему часто называют "теоремой о разделяющей гиперплоскости".

Доказательство. Соотношения (8.2) и (8.3) не могут быть разрешимы одновременно, так как в этом случае, умножив уравнение (8.2) скалярно на y, получаем

$$xAy = by,$$

а при умножении неравенства (8.2) на x получаем, поскольку x неотрицательно,

$$xAy \geqq 0.$$

Но эти два соотношения противоречат условию $by < 0$. Предполагая теперь, что система (8.2) не имеет неотрицательных решений, покажем, что (8.3) имеет решение. Если система (8.2) не имеет решений, то по теореме 8.3 существует такое y, что $Ay = 0$ и $by = -1$; следовательно, y удовлетворяет неравенствам (8.3).

Предположим теперь, что система (8.2) имеет решения, но неотрицательного решения среди них нет, и будем рассуждать индуктивно по m, т. е. по числу строк матрицы A.

Если $m = 1$, то (8.2) обращается в уравнение

$$\xi a_1 = b,$$

$\xi < 0$. Положим тогда y равным $-b$ и заметим, что

$$by = -b^2 \text{ и } a_1 y = \frac{by}{\xi} = \frac{-b^2}{\xi} > 0.$$

Отсюда видно, что y является решением неравенства (8.3).

Предположим теперь, что теорема справедлива, когда число строк матрицы A меньше m. Если система (8.2) не имеет неотрицательных решений, то таких решений не имеет, конечно, и уравнение

$$\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i a_i = b$$

Но тогда по индуктивному предположению существует такое y_1, что $a_i y_i \geqq 0$ для всех $i < m$, и $by < 0$. Если, кроме того, $a_m y_1 \geqq 0$, то y_1 удовлетворяет неравенствам (8.3) и теорема доказана. Если же $a_m y_1 < 0$, то положим

$$\begin{aligned} &\bar{a}_i = (a_i y_1) a_m - (a_m y_1) a_i, \text{ для } i < m \\ &\bar{b} = (b y_1) a_m - (a_m y_1) b. \end{aligned} \tag{8.4}$$

В этом случае уравнение

$$\sum_{i=1}^{m-1} \bar{\xi}_i \bar{a}_i = \bar{b} \tag{8.5}$$

должно иметь неотрицательное решение, так как, подставляя (8.4) в (8.5), мы получаем

$$\frac{1}{-a_m y_1} \left[\sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i (a_i y_1) - b y_1 \right] a_m + \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\xi}_i a_i = b$$

и уравнение (8.2)имело бы неотрицательное решение. Это, однако, противоречит предположенному. Учитывая это обстоятельство, применим наше индуктивное предположение к уравнению (8.5) и получим такой вектор $\overline{y}$, что $\overline{a}_i \overline{y} \geqq 0$ для $i < m$ и $by < 0$. Теперь, положив

$$y = (a_m \overline{y}) y_1 - (a_m \overline{y_1}) \overline{y},$$

мы увидим, что для

$$a_i y = \overline{a}_i \overline{y} \geqq 0, \text{ для} i < m,$$

$$by = \bar{b} \overline{y} < 0$$

и

$$a_m y = 0.$$

Таким образом, y удовлетворяет неравенствам (8.3), и теорема доказана. ■

Система неравенств

$$c_i y \geqq \gamma_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

может не иметь решений, если существуют такие неотрицательные числа ξ_i, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = 0 \text{ и} \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = 1.$$

В противном случае мы бы получили невозможное неравенство

$$0y \geqq 1.$$

Если исключить этот случай, то теорема 8.1 говорит о том, что система неравенств всегда имеет решения.

Теорема 8.2. *(решения линейных неравенств). Имеет место одна и только одна из следующих альтернатив. Либо неравенство*

$$xA \leqslant b, \ x \geqslant \mathbf{0} \tag{8.6}$$

имеет решение, либо существует неотрицательное решение уравнений

$$xA \geqslant \mathbf{0}, by < 0, y \geqslant \mathbf{0}. \tag{8.7}$$

Доказательство. Как мы видели выше, соотношения (8.6) и (8.7) не могут выполняться одновременно. Полагая $= (\gamma, \ldots, \gamma_m)$ – перепишем (8.7) в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = 1.$$

Если эти уравнения не имеют неотрицательных решений, то теорема 8.1 утверждает, что существует такой n-мерный вектор y и такое число η, что

$$a_i y + \gamma_i \eta_i \geqq 0, \text{ для } i = 1, \ldots, m$$

и

$$0y = \eta = \eta < 0.$$

Это, означает, что $a_i\left(\frac{y}{-\eta}\right) \geqq \gamma_i$ и $\frac{y}{-\eta}$ дает желаемое решение неравенства (8.6). ■

Теорема 8.3. *(разрешимость систем линейных уравнений). Имеет место ровно одна из следующих альтернатив. Либо система*

$$xA = b, \;\; x \geqslant 0 \tag{8.8}$$

имеет решение, либо имеют решение система

$$Ay = 0, \;\; by = 1. \tag{8.9}$$

Доказательство. Равенства (8.8) и (8.9) не могут выполняться одновременно. Остается показать, что если неверно (8.8), то справедливо (8.9).

Пусть $a_1, \ldots, a_r$ – строчечный базис матрицы A. Тогда эти векторы и вектор b независимы, так как в противном случае вектор b, являясь линейной комбинацией векторов a_i давал бы некоторое решение уравнения (8.8).

Из следствия теоремы о ранге матрицы известно, что существует такой вектор y, что $a_i y = 0$ для $i \leqq r$ и $by = 1$. Но для всех k, поскольку a_i образуют строчечный базис, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik} a_i$$

и, следовательно, для всех k, $a_k y = 0$; таким образом, как и утверждалось,

$$Ay = 0, by = 1.$$

■

Теорема 8.3 имеет простую геометрическую интерпретацию. Если система (8.8) не имеет решения, то это значит, что вектор b не лежит в подпространстве L, состоящем из линейных комбинаций строчечных векторов a_i. В этом случае теорема утверждает, что можно найти вектор, перпендикулярный подпространству L и образующий с вектором b острый угол.

Обозначая через x^2 произведение x на самого себя, получаем

$$x^2 \geqq 0 \text{ для всех } x \in R^m \text{и} x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

В этом случае $x^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2$ есть и расстояние между точкой x и началом координат, которое всегда положительно.

Теорема 8.4. *(неотрицательные решения линейных неравенств). Выполняется ровно одна из следующих альтернатив. Либо неравенство*

$$Ax \leqq b \tag{8.10}$$

имеет неотрицательное решение, либо имеют неотрицательные решения неравенства

$$Ay \geqq 0,\ \ by < 0. \tag{8.11}$$

Доказательство. Неравенства (8.10) и (8.11) не могут одновременно иметь решения. С другой стороны, предположим, что (8.10) не имеет неотрицательного решения. Это значит, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = b \tag{8.12}$$

не имеет неотрицательного решения $\xi_1, \ldots, \xi_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, где v_j j-й орт в пространстве R^n. Тогда, по теореме 8.2 существует такое y, что

$$a_i y \geqq 0 \text{ для } i = 1, \ldots, m, \tag{8.13}$$

$$v_j y \geqq 0 \text{ для } j = 1, \ldots, n, \tag{8.14}$$

и

$$by < 0. \tag{8.15}$$

Из неравенства (8.14) мы получаем, что y неотрицательно, а из (8.15) и (8.15) следует, что оно удовлетворяет (8.11). ■

Следствие 8.1. *(положительные решения системы однородных уравнений).*

Должна иметь место одна из следующих альтернатив. Либо уравнение

$$xA = 0 \tag{8.16}$$

имеет положительное решение, либо разрешимо неравенство

$$Ay \geqslant 0. \tag{8.17}$$

§9. Базисные решения системы линейных уравнений уравнений

Введем обозначения:

$$M = \{1, \dots, m\},\ N = \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $a_1, \dots, a_m$ – векторы из R^n, а S – подмножество M.

Определение 9.1. Говорят, что решение $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ системы

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b \tag{9.1}$$

зависит от множества S, если для i не принадлежащего S

$$\xi_i = 0.$$

Решение x системы (9.1) называется *базисным решением*, если оно зависит от такого множества S', что векторы a_i для i, принадлежащих S, независимы. Легко видеть, что если (9.1) имеет решение, то оно имеет и базисное решение.

Теорема 9.1. *(о базисных решениях). Если система* (9.1) *имеет, неотрицательное решение, то оно имеет и неотрицательное базисное решение.*

Доказательство. Доказательства проводится индукцией по m. При $m = 1$ теорема очевидна.

Предположим, что она имеет место для $k < m$ и пусть $x = (\xi_i)$ – неотрицательное решение системы (9.1). Если какая-нибудь из компонент ξ_i равна нулю, то мы немедленно приходим к случаю $k = m - 1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая положительного x. Таким образом, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b, \; \xi_i > 0, 1 = 1, \ldots, m. \tag{9.2}$$

Далее, если векторы ai независимы, то x является базисным решением.

Предположим, что векторы ai зависимы, т. е. что существуют такие числа λ_i не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0. \tag{9.3}$$

Мы можем при этом считать некоторое λ_i положительным (в противном случае достаточно умножить (9.3) на -1). Пусть далее $\Theta = \max\limits_i \lambda_i/\xi_i$. Положим $\Theta = \lambda_i/\xi_i > 0$ (изменяя, если это нужно, нумерацию). Умножая (9.3) на $1/\Theta$ и используя (9.2), мы получаем, что

$$\frac{1}{\Theta} \sum_{i=1}^{m} \left(\Theta - \frac{\lambda_i}{\xi_i} \right) \xi_i a_i = b. \tag{9.4}$$

Но по определению Θ первый коэффициент в (9.4) равен нулю, а все остальные неотрицательны. Таким образом, мы получили неотрицательное решение уравнения (9.1), зависящее только от $a_2, \ldots, a_m$, тем самым доказательство сводится к случаю, когда число векторов меньше m. ■

§10. Двойственность в линейном программировании

С каждой задачей линейного программирования, которую условно назовем прямой задачей, однозначно связана другая задача линейного программирования, называемая двойственной задачей. Помимо однозначности написания между прямой и двойственной задачами существует содержательная взаимосвязь.

Рассмотрим общую задачу нахождения неотрицательных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$, которые удовлетворяют следующей общей задаче:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \tag{10.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqslant \beta_j, j = 1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Двойственной задачей к исходной будет следующая общая задача на минимум:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j \tag{10.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} \geqslant \gamma_j, i = 1, \ldots, m. \tag{10.4}$$

§11. Правила построения двойственной задачи

1. Каждому ограничению прямой задачи (ПЗ) соответствует переменная двойственной задачи (ДЗ) и наоборот.
2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи и наоборот.
3. Если прямая задача – задача максимизации, то двойственная – задача минимизации.

Перейти к оглавлению на странице: 201

Переменные ДЗ	Переменные ПЗ $\xi_1 \quad \dots \xi_j \quad \dots \xi_m$ Коэффициенты целевой функции ПЗ $\gamma_1 \quad \dots \gamma_j \quad \dots \gamma_m$	Коэфф. целевой функции ДЗ
η_1 $\dots$ η_i $\dots$ η_n	$a_{11} \quad \dots \alpha_{1j} \quad \dots \alpha_{1m}$ $\dots$ $\alpha_{i1} \quad \dots \alpha_{ij} \quad \dots \alpha_{in}$ $\dots$ $\alpha_{n1} \quad \dots \alpha_{mj} \quad \dots \alpha_{nm}$	β_1 $\dots$ β_i $\dots$ β_n
ПЗ – задача максимизации	ДЗ – задача минимизации	

Таблица 1.2 Соответствие элементов прямой и двойственной задач

4. Ограничениям типа стандартных неравенств ПЗ соответствуют неотрицательные переменные ДЗ, ограничениям типа равенств ПЗ – переменные ДЗ, на знак которых не наложены ограничения и наоборот.

Задача максимизации	Задача минимизации
Ограничения	*Переменные*
$\geqslant$	$\leqslant 0$
$\leqslant$	$\geqslant 0$
$=$	переменная не имеет ограни- -чений на знак
Переменные	*Ограничения*
$\geqslant 0$	$\geqslant$
$\leqslant 0$	$\leqslant$
переменная не имеет ограни- -чений на знак	$=$

Таблица 1.3 Соответствие знаков переменных и ограничений прямой задачи и двойственной задачи.

Рассмотрим пример построения двойственной задачи.

Пример 11.1. Прямая задача линейного программирования.

$$\max\varphi = \max(4\xi_1 + 10\xi_2 + 5\xi_3);$$
$$\xi_1 + \xi_2 + 1\xi_3 = 8;$$
$$\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 \leqslant 12;$$
$$3\xi_1 + 2\eta_2 \geqslant 4;$$
$$\xi_1 \geqslant 0,\ \ \xi_3 \leqslant 0.$$

Двойственной задачей будет следующая задача:

$$\min w = \min(8\eta_1 + 12\eta_2 + 4\eta_3);$$
$$\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3 = 4;$$
$$2\eta_1 - \eta_2 + 2\eta_3 \leqslant 10;$$
$$\eta_1 + 2\eta_2 \geqslant 5;$$
$$\eta_1 \geqslant 0,\ \ \eta_3 \leqslant 0.$$

Частные случаи прямой и двойственной задач в векторной форме

Прямая задача ЛП	Двойственная задача ЛП
$\max\varphi = \max CX$ $AX \leqslant B$ $X \geqslant 0$	$\min w = \min BY$ $YA \geqslant C$ $Y \geqslant 0$
$\min z = \min CX$ $AX \geqslant B$ $X \geqslant 0$	$\max w = \max BY$ $YA \leqslant C$ $Y \geqslant 0$
$\max\varphi = \max CX$ $AX = B$ $X \geqslant 0$	$\min w = \min BY$ $YA \geqslant C$
$\min z = \min CX$ $AX \leqslant B$	$\max w = \max BY$ $YA = C$ $Y \leqslant 0$
$\min z = \min CX$ $AX = B$ $X \geqslant 0$	$\max w = \max BY$ $YA \leqslant C$

Определение 11.1. Вектор x, удовлетворяющий ограничениям прямой задачи (10.2) называется допустимым вектором (решением) задачи.

Определение 11.2. Допустимое решение, на котором достигается максимум скалярного произведения cx, называется оптимальным решением прямой задачи.

Определение 11.3. Вектор y, удовлетворяющий ограничениям двойственной задачи (10.4) называется допустимым решением задачи.

Определение 11.4. Допустимое решение, на котором достигается минимум скалярного произведения by, называется оптимальным решением.

Интерпретация двойственности.

Задача о диете. Двойственную задачу можно описать так: определить значения или "цены"каждого питательного вещества N_i таким образом, чтобы ценность всех питательных веществ, содержащихся в единице j-го продукта F_{ij} не превосходила цены единицы этого продукта π_i и чтобы суммарная цена требуемого в диете количества питательных веществ была максимальной.

Можно ли поставить эту двойственную задачу так, чтобы она приобрела экономический смысл?

Диетолог хотел бы минимизировать цену диеты, отвечающей упомянутым требованиям, но чем объяснить его стремление максимизировать количество питательных веществ в такой диете?

Введем новое действующее лицо - фармацевта (витаминов в драже, железа в капсулах и т. д.) Этот фармацев может, конечно, заготовить для диетолога диету со всеми питательными веществами, которые последнему необходимы в концентрированном виде. Диетолог, единственная цель которого состоит в минимизации затрат, охотно заменит мясо и картофель на драже и капсулы, если это сэкономит деньги (здесь намечается некоторый дальнейший отход от реализма задачи). Предположим далее, что фармацевт установил цену единицы N_i (i-е питательное вещество) в размере ξ_i, будучи уверен, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqslant \pi_i, \text{для любых} j, \tag{11.1}$$

где α_{ij} – количество вещества N_i в продукте F_j. Это значит, что полная цена питательных веществ в единице F_j не больше, чем ее цена. Тогда ясно, что для диетолога не имеет значения, какую диету он выберет; для него всегда будет выгодно покупать пилюли, поскольку цена каждого продукта не меньше цены содержащихся в нем питательных веществ. Фармацевт хочет, однако, получить с диетолога столько, сколько допускается ограничениями (11.1). Поскольку диета, отвечающая требованиям, предусматривает γ_i единиц вещества N_i он устанавливает цену ξ_i так, чтобы максимизировать сумму

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i, \tag{11.2}$$

а это и есть в точности двойственная задача.

§12. Свойства допустимых решений прямой и двойственной задач

Лемма 12.1. *Пусть $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – допустимое решение стандартной задачи на максимум (т.е. неотрицательное решение неравенств (10.2)) и пусть $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ – допустимое решение двойственной задачи (неотрицательное решение неравенств (10.4)). Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \leqslant \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j. \tag{12.1}$$

Доказательство.

Умножим j-е неравенство в (10.2) на η_j и суммируем по j получим

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \tag{12.2}$$

Умножим i-е неравенство в (10.4) на ξ_i и суммируем по i получим

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \tag{12.3}$$

Сопоставляя выражения (12.2) и (12.3) получаем (12.1). ■

Перейти к оглавлению на странице: 201

§13. Критерий оптимальности

Теорема 13.1. *(критерий оптимальности). Пусть существуют такие допустимые решения* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ *и* $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *прямой и двойственной ей задачи, тогда если выполняется*

$$cx = by \tag{13.1}$$

или в координатной форме

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j.$$

то допустимое решение x *являются в действительности и оптимальным решением прямой задачи, а* y *оптимальным решением двойственной задачи.*

Доказательство.

Пусть $x' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_m)$ - какое-нибудь другое допустимое решение прямой задачи на максимум, $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Тогда по лемме 12.1

$$\sum_{i=1}^{m} \xi'_i \gamma_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j. \tag{13.2}$$

Объединяя это неравенство с (13.1), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi'_i \gamma_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma_i, \tag{13.3}$$

а это значит, что $\xi_1, \ldots, \xi_m$ является оптимальным решением. Аналогично доказывается оптимальность $\eta_1, \ldots, \eta_n$. ■

Теорема 13.2. *(Основная теорема двойственности.) Если стандартная задача на максимум или на минимум и двойственная ей являются допустимыми, то обе они имеют оптимальные решения и одинаковое значение.*

§14. Теорема двойственности

Теорема 14.1. *(теорема двойственности). Если обе двойственные задачи допустимы, то обе они имеют оптимальные решения x^* и y^*, и значения этих задач совпадают*

$$\varphi^* = w^*, \ \varphi = cx, \ w^* = by.$$

Если хотя бы одна задача (прямая или двойственная) не является допустимой, то обе задачи не имеют оптимального решения.

Доказательство.

Доказательство проводится пары задач в стандартной форме.

Предположим сначала, что и стандартная задача максимизации и двойственная к ней допустимы. В этом случае найдутся неотрицательные решения неравенств

$$xA \leqq b, \tag{14.1}$$

$$Ay \geqq c, \tag{14.2}$$

Теорема будет доказана, если мы сможем найти решения (14.1) и (14.2), которые удовлетворяют также неравенству

$$xc - yb \geqq \mathbf{0}. \tag{14.3}$$

Действительно, мы видели, в лемме 12.1, что если неотрицательные x и y удовлетворяют условиям (14.1) и (14.2), то

$$xc \leqq yb,$$

так что если (14.3) верно, то

$$xc = yb.$$

Следовательно, оба вектора x и y оптимальны.

Предположим теперь, что система неравенств (14.1), (14.2) и (14.3) не имеет неотрицательных решений. Это будет как раз та ситуация, в которой применима теорема 8.4 о неотрицательных решениях линейных неравенств.

Выпишем наши неравенства (14.1), (14.2) и (14.3), то получим

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \beta_j, j = 1, \ldots, n, \tag{14.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j(-\alpha_{ij}) \leqq -\gamma_i, i = 1, \ldots, m, \tag{14.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j - \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \leqq 0. \tag{14.6}$$

Если эти неравенства не имеют неотрицательных решений, то из теоремы о неотрицательных решениях линейных неравенств следует, что найдутся неотрицательный n-мерный вектор $\varphi = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, неотрицательный m-мерный вектор $w = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ и число $\Theta \geqq 0$, для которых

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \alpha_{ij} - \Theta\gamma_i \geqq 0, i = 1, \ldots, m, \tag{14.7}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \omega_i \alpha_{ij} + \Theta\beta_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n, \tag{14.8}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \zeta_j - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \omega_i < 0. \tag{14.9}$$

В матрично-векторной форме эти соотношения можно переписать так:

$$Az \geqq \Theta c, \tag{14.10}$$

$$\omega A \leqq \Theta b, \tag{14.11}$$

$$zb - \omega c < 0. \tag{14.12}$$

Докажем, что $\Theta = 0$. Предположим, $\Theta > 0$,
Домножим $Az \geqslant \mathbf{0}$ на x слева, и $wA \leqslant \mathbf{0}$ на y справа.

$$bz \geqslant xAz \geqslant \mathbf{0}$$
$$cw \leqslant wAy \leqslant \mathbf{0}$$

Из последних неравенств следует соотношение

$$bz \geqslant cw.$$

Из неравенства (14.9) получаем $bz < cw$, следовательно противоречие. Таким образом $\Theta > 0$. Разделим неравенства (14.7), (14.8), (14.9) на Θ

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j}{\Theta} \alpha_{ij} - \Theta\gamma_i \geqq 0, i = 1, \ldots, m,$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\Theta} \alpha_{ij} + \Theta\beta_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n,$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\zeta_j}{\Theta} - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\omega_i}{\Theta} < 0.$$

Введем обозначения $\zeta'_j = \frac{\zeta_j}{\Theta}$, $w'_i = \frac{\omega_i}{\Theta}$.

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta'_j \alpha_{ij} - \Theta\gamma_i \geqq 0, i = 1, \ldots, m,$$

$$-\sum_{i=1}^{m} w'_i \alpha_{ij} + \Theta\beta_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n,$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \zeta'_j - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i w'_i < 0.$$

Запишем в векторном виде:

$$\begin{aligned} &Az' \geqslant c', \\ &w'A \leqslant b, \\ &bz' - cw' < 0 \end{aligned}$$

здесь $z' = (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$, $w' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_m)$, $z' \geqslant \mathbf{0}$.

Вектор z' – допустимое решение двойственной задачи, w' – допустимое решение прямой задачи.

Тем самым получили противоречие и, следовательно, система (14.1), (14.2) имеет неотрицательное решение

$$by = cx$$

по леммме 12.1.

Запишем прямую и двойственную задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\max cx \\ &xA \leqslant b \\ &x \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{14.13}$$

$$\begin{aligned} &\min by \\ &Ay \geqslant c \\ &y \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Пусть задача (14.13) не имеет допустимого решения, если при этом (14.14) тоже не будет иметь допустимого решения, тогда она не имеет оптимального решения.

Пусть вторая система (14.14) имеет допустимое решение $\overline{y}$. Так как система (14.13) то по теореме 8.1 существует неотрицательное решение системы

$$\begin{aligned} &Az \geqslant \mathbf{0} \\ &bz < \mathbf{0} \\ &z \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Предположим, что $\overline{z}$ – неотрицательное решение системы (14.15). Возьмем $\lambda > 0$ и составим вектор $y = \overline{y} + \lambda\overline{z}$, который является допустимым решением для двойственной задачи.

$$\begin{aligned} &Ay = A\overline{y} + \lambda A\overline{z} \geqslant c \\ &by = b\overline{y} + \lambda b\overline{z} \end{aligned}$$

здесь $b\overline{z} < \mathbf{0}$ поэтому выражение $(y+\lambda z)b$ может быть сделано произвольно малым и поэтому оно не имеет минимума, так что двойственная задача не имеет оптимального вектора. Таким образом, в случае стандартной задачи доказательство завершено.

■

§15. Геометрическая интерпретация базисного решения

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$xA = b,$$

в координатной форме эту систему можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b.$$

Базисным решением системы линейных уравнений называется неотрицательное решение $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ системы

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = \beta_i, i = \overline{1, m}.$$

которое зависит от такого множества S (S – подмножества индексов $\{1, \ldots, n\}$, такое что $\xi_j \neq 0, j \in S$,)что векторы векторы a_j для $j \in S$, независимы.

Пусть x – базисное решение, которое зависит от множества индексов S.

Определение 15.1. Базисное решение называется невырожденным, если $\xi_i \neq 0,\ i \in S$. В противном случае это базисное решение называется вырожденным.

Определение 15.2. Базисное решение называется допустимым базисным решением, если $x \geqslant \mathbf{0}$.

Допустимое базисное решение x зависящее от множества индексов S, называется невырожденным, если $\xi_i > 0,\ i \in S.$

Рассмотрим общий случай, имеется система линейных уравнений $xA = b$ и рассмотрим множество $K = \{z|z = xA,\ x \geqslant 0\}, b \in K$.

Система линейных уравнений имеет столько базисных решений, сколько имеется базисов, и такое количество допустимых базисных решений, сколько порожденных базисом конусов, в которых находится вектор b.

Пример 15.1. Рассматривается система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Эта система совместна. Воспользуемся (9.1), и исследуем вопрос, сколько базисных решений имеет заданная система линейных уравнений.

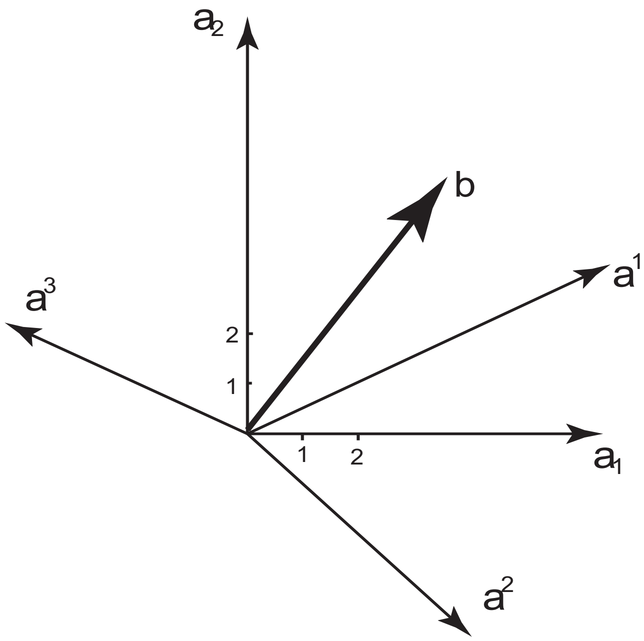

Рис. 15.1. Пространство столбцов матрицы.

Первый столбец матрицы A – $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, второй столбец матрицы A $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, третий столбец матрицы A $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, столбец правых частей $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

У нас имеется три базисных решения, при этом допустимое базисное решение одно. Конус K совпадает со всей плоскостью.

(a^1, a^3) будет базисным решением, но не будет допустимым базисным решением, т.к. вектор b не лежит внутри (a^1, a^3). Аналогично (a^2, a^3) будет базисным решением, но не будет допустимым базисным решением, (a^1, a^2) будет базисным решением, а также будет допустимым базисным решением.

Допустимое базисное решение будет невырожденным, если вектор b принадлежит внутренности конуса, если этот вектор принадлежит границе, то в этом случае допустимое базисное решение будет вырожденным. Найдем в базисное решение которое соответствует случаю. Мы получили, что базис образуют a^1 и a^2, следовательно третья компонента должна быть равна 0, (по определению базисного решения) $x_3 = 0$. В результате получим:

$$\begin{aligned} &x_1 - 2_x - 2 = 1 \\ &2x_1 + x_2 = 3, \end{aligned}$$

отсюда

$$x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = \frac{1}{5}.$$

Базисное решение выглядит следующим образом: $x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = \frac{1}{5}, x_3 = 0$ и зависит от множества индексов $S = \{1, 2\}$.

Пример 15.2. Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ &5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Напрямую говорить о допустимом базисном решении нельзя, так как у нас в задаче неравенства, а следовательно в каждое из неравенств введем слабую переменную, S_1 и S_2 соответственно. Получаем каноническую форму исходной задачи:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + S_1 = 4, \\ &5x_1 + 2x_2 + S_2 = 10 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ S_1 \geqslant 0,\ S_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

В этом случае получаем следующее базисное решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, S_1 = 4, S_2 = 10$. Если приведем систему к диагональной форме по другим переменным, то получим другое базисное решение.

§16. Каноническая теорема равновесия

Рассмотрим пару задач, прямую и двойственную, в канонической форме:

$$\begin{aligned} &\max cx \\ &xA = b \\ &x \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

$$\begin{aligned} &\min by \\ &Ay \geqslant c \end{aligned} \tag{16.2}$$

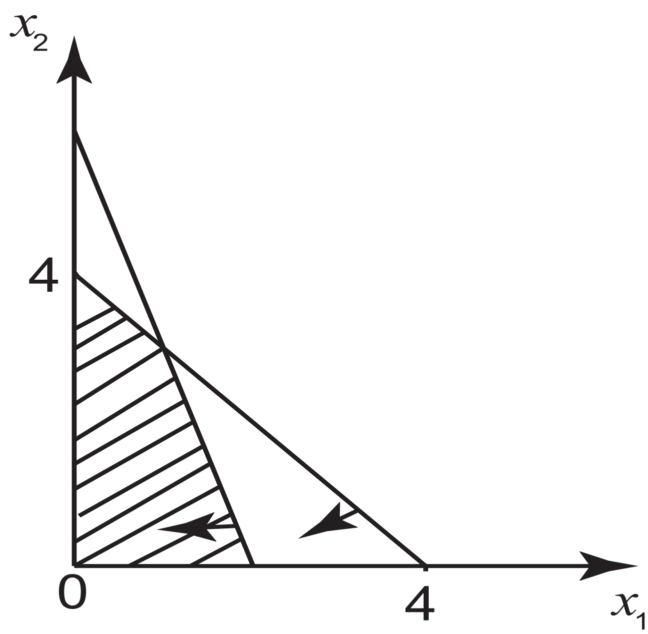

Рис. 15.2. Множество допустимых решений.

Теорема 16.1. *(каноническая теорема равновесия). Рассмотрим пару двойственных задач 16.1, 16.2. Для того, чтобы допустимые решения x и y соответствующих задач были оптимальными решениями задач 16.1, 16.2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

1. *Если $\xi_i > 0$, то*
$$a_i y = \gamma_i, \tag{16.3}$$

2. *Если $a_i y > \gamma_i$, тогда $\xi_i = 0$.*

Данная теорема справедлива, если одна из задач записана в канонической форме.

Доказательство. Пусть x и y – допустимые решения задач 16.1, 16.2.

Рассмотрим число $\alpha = x(Ay - c) \geqslant 0$. В этом выражении $x \geqslant 0$ и $(Ay - c) \geqslant 0$.

Запишем
$$\alpha = (xA)y - xc = by - cx \geqslant 0,$$
здесь $x \geqslant 0$ – допустимое решение прямой задачи 16.1.

Необходимость следует из теоремы двойственности 14. Из теоремы двойственности следует, что для того чтобы пара допустимых решений была оптимальна необходимо и достаточно выполнения равенства $by = cx$, а это выполняется тогда, когда $\alpha = 0$,

$$0 = \alpha = x(Ay - c) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i (a_i y - \gamma_i),$$

отсюда следует $\xi_i(a_i y - \gamma_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, если $\xi_i > 0$, то $a_i y - \gamma_i = 0$. В случае если $a_i y - \gamma_i > 0$, то $\xi_i > 0$. ■

§17. Выпуклые множества

Множество $M \subset R^m$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками этого множества точками этого множества $x_1, x_2 \in M$ в нем содержатся все точки отрезка $\lambda x_1 + (1 - \lambda), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Понятие выпуклого множества можно сформулировать и в более общем, но эквивалентном виде.

Определение 17.1. Множество $M \subset R^m$ называется выпуклым, если вместе с точками $x_1, \ldots, x_k$ из M оно содержит и все точки вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \tag{17.1}$$

называемые выпуклыми линейными комбинациями точек $x_1, \ldots, x_k$.

Пересечение выпуклых множеств всегда выпукло. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$xA \leqslant b$$

или

$$xa^j \leqslant \beta_j, \ j \in N, \ N = \{1, \ldots, n\}, \tag{17.2}$$

где $A = [a^j, j \in N]$ – $m \times n$ – матрица, $x \in R^m$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^n$. Обозначим $\overline{X} = \{x | xa \leqslant b\}$ множество решений системы (17.1). Непосредственно из определения следует, что $\overline{X}$ – выпуклое множество. Множество $\overline{X}$ называется выпуклым многогранным множеством, заданным системой ограничений (17.1).

Точка $x \in M$, где M – выпуклое множество, называется крайней точкой, если из условий $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M, 0 < \lambda < 1$, следует, что $x_1 = x_2 = x$. Содержательно определение означает, что $x \in M$ – крайняя точка, если не существует отрезка, содержащего две точки из M, для которого x является внутренней. Заметим, что крайняя точка выпуклого множества всегда является граничной, обратное неверно. Пусть X – выпуклое многогранное множество, заданное системой ограничений (17.1). Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 17.1. *Множество* $\overline{X}$ *имеет крайние точки тогда и только тогда, когда*

$$rank A = [a^j, j \in N] = m.$$

Теорема 17.2.

Для того чтобы точка $x_0 \in X$ *была крайней, необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы:*

$$x_0 a^j = \beta_j, \ i \in N; \tag{17.3}$$

$$x_0 a^j \leqslant \beta_j, \ i \in N \setminus N_1, \tag{17.4}$$

где $N_1 \subset N$, $rank[a^j, j \in N_1] = m$.

Последняя теорема дает алгоритм нахождения крайних точек множества $\overline{X}$. Для этого необходимо рассмотреть столбцовые базисы матрицы A, решить систему линейных уравнений (17.3) и проверить выполнение неравенств (17.4). Однако такой способ поиска крайних точек многогранного множества мало пригоден для практики, поскольку он связан с полным перебором всевозможных столбцовых базисов матрицы A.

Определение 17.2. Выпуклой оболочкой множества P будем называть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих P, и обозначать $conv(P)$.

Данное определение эквивалентно следующему.

Выпуклая оболочка множества P состоит из всех выпуклых линейных комбинаций всевозможных точек из P, т. е.

$$conv(P) = \{x | x = \sum_{i=1}^{n} \} \lambda_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0, x_i \in P.$$

Выпуклая оболочка конечного числа точек называется выпуклым многогранником, порожденным этими точками. Выпуклый многогранник порожден своими крайними точками.

Определение 17.3. Конусом C называется множество таких точек, что если $x \in C, \lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in C$.

Содержательно конус C – это такое подмножество R^m, которое вместе с точкой x содержит и всю полупрямую (x), где

$$(x) = \{y|y = \lambda x, \lambda \geqslant 0\}.$$

Конус C называется выпуклым конусом, если выполняется условие: для всех x, $y \in C$ справедливо $x + y \in C$. Другими словами, конус C – выпуклый, если он замкнут относительно операции сложения. Можно дать и другое эквивалентное определение. Конус называется выпуклым, если он является выпуклым множеством. Сумма выпуклых конусов

$$C_1 + C_2 = \{c|c = c_1 + c_2, c_1 \in C_1,\ c_2 \in C_1\}$$

и их пересечение $C_1 \bigcap C_2$ также являются выпуклыми конусами. Непосредственной проверкой определения можно показать, что множество

$$C = \{x|xA \leqslant 0\}$$

решений однородной системы линейных неравенств, соответствующей (17.1), является выпуклым конусом. Пусть X – выпуклое многогранное множество, заданное системой ограничений (17.1), записанной в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i \leqslant bj, \tag{17.5}$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in R^m$, a_i – i-я строка матрицы A, $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что $rankA = r \leqslant m$, и векторы $a_1, \ldots,$ образуют строчечный базис матрицы A. Разложим остальные строки по базису

$$a_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} a_i,\ j = r+1, \ldots, m. \tag{17.6}$$

Подставляя (17.6) в (17.5), получим эквивалентную (17.5) систему неравенств

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i + \sum_{j=r+1}^{m} \delta_{ij}\xi_i\right) \leqslant b. \tag{17.7}$$

Обозначим через X_0 множество векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in R^m$, удовлетворяющих неравенствам (17.7) и условию $\xi_j = 0,\ j = r+1, \ldots, m$. По теореме 17.3 множество X_0 имеет крайние точки.

Справедлива следующая теорема о представлении многогранного множества.

Теорема 17.3. *Пусть $\overline{X}$ многогранное множество, заданное системой ограничений (17.5). Тогда $\overline{X} = M + C,$, где $M + C = \{x | x = y + z, y \in M, z \in C\}$, M – выпуклый многогранник, порожденный крайними точками многогранного множества X_0, заданного (17.7), а $C = \{x | xA \leqslant 0\}$ – выпуклый конус.*

Из теоремы.в частности, следует, что если множество $\overline{X}$ решений системы (17.5) ограничено, то $\overline{X}$ – выпуклый многогранник.

§18. Существование оптимального базисного решения

Рассмотрим пару задач линейного программирования, прямую и двойственную к ней.

$$\begin{aligned} &\max cx \\ &xA = b \\ &x \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{18.1}$$

$$\begin{aligned} &\min by \\ &Ay \geqslant c \end{aligned} \tag{18.2}$$

Теорема 18.1. *Если задача линейного программирования 18.1 имеет оптимальное решение, то эта задача имеет и оптимальное базисное решение.*

Доказательство.

Пусть x' оптимальное решение задачи 18.1, зависящий, от множества индексов S, тогда по канонической теореме равновесия 16 для любого оптимального решения $\overline{y}$ в задаче 18.2 будет выполняться:

$$a_i y = \gamma_i, i \in S,$$

где a_i – строки матрицы.

Рассмотрим $\{a_i\}_{i \in S}$. Возможны следующие два варианта:

1. $\{a_i\}$ – линейно независимы, и в этом случае x' будет искомым базисным решением.

2. $\{a_i\}$ – линейно зависимы, тогда по теореме о допустимых базисных решениях 9.1 существует решение $\overline{x}$, зависящее от подмножества множества S, которое является линейно независимым.

Решение $\overline{x}$ по построению будет базисным, в тоже время $\overline{x}$ – допустимое решение и по канонической теореме равновесия будет оптимальным решением. В результате получаем, что $\overline{x}$ и $\overline{y}$ оптимальные решения.

Эта теорема показывает, что каноническая задача может быть решена за конечное число шагов ■

§19. Решение систем уравнений и обращение матриц

Рассмотрим задачу решения системы линейных уравнений.

Задача. Даны: $m \times n$-матрица A и n-мерный вектор $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Найти такой m-мерный вектор x, что

$$xA = b.$$

Это – задача решения системы линейных уравнений, поставленная в матричной форме.

Задача. Дано $m+1$ векторов в R^n: $a_1, \ldots, a_m$ и b. Выразить, если это возможно, b в виде линейной комбинации векторов a_i. Опишем теперь метод решения этой задачи.

Выразим b как линейную комбинацию некоторого множества векторов из R^n, именно единичных ортов $(v_1, ..., v_n)$ пространства R^n, $(v_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0))$. Действительно, если $b = (v_1, \ldots, v_n)$, то

$$b = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n. \tag{19.1}$$

Задача состоит теперь в том, чтобы в представлении (19.1) постепенно заменить векторы v_j векторами a_i.

Например, можно попытаться заменить v_1 на $a_i 4$, получив таким образом представление b в виде линейной комбинации a_1, $v_2, \ldots, v_n$:

$$b = \beta_1' a_1 + \beta_2' v_2 + \ldots + \beta_n' v_n. \tag{19.2}$$

Для всех остальных векторов действуем аналогично.

Определение 19.1. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – множество линейно независимых векторов, $b_1, \ldots, b_n$ – множество векторов, каждый из которых является линейной комбинацией a_i. Таблицей векторов b_j по отношению к базису a_i называется матрица T, выражающая каждый из векторов b_j в виде линейной комбинации a_i.

Она записывается так:

$$T = \begin{array}{c|ccccc|}
 & b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_n \\
\hline
a_1 & \tau_{11} & \ldots & \tau_{1j} & \ldots & \tau_{1n} \\
\vdots & & & & & \\
a_i & \tau_{i1} & \ldots & \tau_{ij} & \ldots & \tau_{in} \\
\vdots & & & & & \\
a_m & \tau_{m1} & \ldots & \tau_{rj} & \ldots & \tau_{mn} \\
\hline
\end{array}$$

Здесь τ_{ij} есть коэффициент при a_i в выражении для b_j, т.е.

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i$$

Основной вычислительный этап здесь состоит в выполнении *операции замещения.*

Предположим, что необходимо заменить в приведенной таблице вектор a_r вектором b_s. Если $\tau_{ij} > 0$, то должна сохраняться линейная независимость векторов $a_1, \ldots, a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, \ldots a_m$.

Новая таблица примет вид:

$$T' = \begin{array}{c|ccccc|} & b_1 & \dots & b_s & \dots & b_n \\ \hline a_1 & \tau'_{11} & \dots & 0 & \dots & \tau'_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ b_s & \tau'_{i1} & \dots & 1 & \dots & \tau'_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_m & \tau'_{n1} & \dots & 0 & \dots & \tau'_{mn} \\ \hline \end{array}$$

Выразим элементы τ'_{ij} новой таблицы через элементы τ'_{ij} старой таблицы.

Теорема 19.1. *(операция замещения) Если в таблице T, $\tau_{ij} \neq 0$, то векторы $a_1, \dots, a_{r-1}$, $b_s, a_{r+1}, \dots, a_m$ образуют базис, и элементы таблицы T имеют вид:*

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj}, \; i \neq j, \tag{19.3}$$

$$\tau'_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_{rs}}. \tag{19.4}$$

Доказательство. Чтобы доказать линейную независимость векторов $a_1, \dots, a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, \dots, a_n$ предположим противное. Пусть эти вектора линейно зависимы и существует такое λ_j, $j \neq 1, m, i \neq r$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \mu_s b_s = 0, \; i \neq r. \tag{19.5}$$

Из таблицы T имеем

$$b = \sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a_i. \tag{19.6}$$

Комбинируя (19.5) и (19.6), получаем

$$\sum_{i \neq r} (\lambda_i + \mu_s \tau_{is}) a_i + \mu_s \tau_{rs} a_r = 0. \tag{19.7}$$

Так как векторы a_i независимы, то (19.7) возможно если все коэффициенты равны нулю. В частности, $\mu_s \tau_{rs} = 0$, а так как $\tau_{rs} \neq$

0, должно быть $\mu_s = 0$. Поэтому все $\lambda_i = 0$, $i \neq r$, и линейная независимость доказана.

Теперь нужно показать, что

$$b_j = \sum_{i \neq r} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s, \tag{19.8}$$

где коэффициенты определяются из (19.2) и (19.3). Раскрывая правую часть (19.8), получаем

$$b_j = \sum_{i \neq r} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{tj} \right) a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{tj} \right) a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} \left(\sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} - \tau_{rj} a_r - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{ij} a_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{ij} a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} - - \sum_{\substack{i=1 \\ i = r}}^{m} \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{ij} a_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{ij} a_i = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij}.$$

Объединяя коэффициенты при a_i, получаем окончательно

$$\sum_{i \neq r} \tau_{ij} a_i + \tau_{rj} a_r = b_j,$$

что доказывает (19.6).

Ненулевой элемент τ_{ij} таблицы T часто называют *ведущим элементом* данного замещения. ∎

§20. Теория симплекс-метода

Рассмотрим каноническую задачу минимизации:

$$\min w = yb; \tag{20.1}$$

$$\begin{cases} Ay = c; \\ y \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{20.2}$$

Здесь $A = \{\alpha_{ij}\}_{m \times n}$, $b \in R^n$, $y \in R^n$, $c \in R^m$. Предположим, что имеется базис $a^1, \ldots, a^p$, соответствующий ему допустимый вектор $y = (\eta_j)$ и таблица T.

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & a^1 & \ldots & a^m & \ldots & a^s & \ldots & a^n & c \\ \hline a^1 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \tau_{1s} & \ldots & \tau_{1n} & \eta_1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a^r & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \tau_{rs} & \ldots & \tau_{in} & \eta_r \\ \vdots & & & & & & & & \\ a^m & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \tau_{ms} & \ldots & \tau_{mn} & \eta_m \\ \hline \end{array}$$

Если вернуться к задаче о диете 1.1, то получим следующую интерпретацию. Продукт a^s может быть заменен на продукт a^1 в количестве τ_{1s} или заменен на продукт a^j в количестве τ_{js} и так далее. Следовательно получаем синтетический продукт, стоимость которого равна $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \tau_{is} = \zeta_s$. Сравним стоимость обычного и синтетического продукта. Пусть синтетический продукт стоит меньше, то есть $\beta_s < \zeta_s$, и предположим мы добавляем η_s синтетического продукта, при этом должно выполняться: $\eta_i - \eta_s \tau_{is} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ или $\eta_s \geqslant 0$. Будем увеличивать η_s до тех пор, пока это решение $\eta_i - \eta_s \tau_{is} \geqslant 0$, в нашей задаче не может быть отрицательное количество пищи.

Таким образом можем получаем второе правило симплекс метода. Для того чтобы ввести в новый базис вектор a^s, необходимо подсчитать отношение $\dfrac{\eta_i}{\tau_{is}}$, для $\tau_{is} > 0$, и заменить тот вектор a^r старого базиса, для которого это отношение минимально.

$$\eta_s = \frac{\eta_r}{\tau_{rs}} = \min_i \frac{\eta_r}{\tau_{is}}, \tau_{is} > 0.$$

§21. Правило симплекс-метода

1. Ищем столбец в таблице T такой, что $\beta_s < \zeta_s$, т.е. $\beta_s - \zeta_s > 0$. Таких столбцов может быть несколько. Выбираем один из таких столбцов, и говорим, что это кандидат на введение в базис.

2. Для того чтобы определить, какой вектор надо вывести из базиса, строим отношение $\dfrac{\eta_i}{\tau_{is}}$, $\tau_{is} > 0$, ищем

$$\frac{\eta_r}{\tau_{rs}} = \min_i \frac{\eta_r}{\tau_{is}}$$

   и вектор a_r выводим из базиса.

   Если таких $\tau_{rs} > 0$ не существует, следовательно минимума не существует.

   Если не существует таких $\beta_s < \zeta_s$, следовательно текущее базисное решение оптимально.

Теорема 21.1. *(критерий оптимальности). Пусть*

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}$$

Тогда допустимый вектор $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *оптимален, если*

$$\zeta_j \leqq b_j \tag{21.1}$$

при всех $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Предположим, что 21.1 выполняется при всех j. Так как векторы $a^1, \ldots, a^p$ независимы, существует такой m-вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, что

$$xa^j = \beta_j$$

при $j = 1, \ldots, p$.

Но при $j > p$ имеем

$$xa^j = \sum_{i=1}^{p} \tau_{ij}(xa^i) = \sum_{i=1}^{p} \tau_{ij}\beta_i = \zeta_j \leqq \beta_j.$$

Таким образом, вектор x удовлетворяет как ограничению

$$xA \leqq b,$$

так и ограничению

$$xa^j = \beta_j,$$

если только $\eta_j > 0$. Следовательно, по теореме равновесия y является оптимальным вектором (а вектор x оптимальным для двойственной задачи). ■

Замечание 21.1.

По правилу, вместе с вычислением каждой таблицы, нам неоходимо вычислять еще и величины

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}.$$

Однако их можно вычислять при переходе от таблицы T к T'.

Определим $(n+1)$ мерный вектор z по правилу

$$z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_0),$$

где $\zeta_j = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}, j \geqq 0$, а

$$\zeta_0 = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \eta_i. \tag{21.2}$$

Величина ζ_0 есть значение целевой функции. Расширим таблицу T добавлением к ней в качестве $(n+1)$ строки вектора

$$z - b = (\zeta_1 - \beta_1, \ldots, \zeta_n - \beta_n, \zeta_0).$$

Предположим, что необходимо заменить вектор базиса a^r на a^s, и тем самым осуществить переход от таблицы T к T'. Обозначим i-ю строку таблицы T через t_i.

Лемма 21.1. *Дополнительная строка $z' - b$ таблицы T' находится по правилу*

$$z' - b = z - b - \frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} t_r.$$

Доказательство. По определению z' и t'_i

$$z' = \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i t'_i + \beta_s t'_r = \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i \left(t'_i - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} t_r \right) + \frac{\beta_s}{\tau_{rs}} t_r =$$

$$= \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i t_i - \beta_r t_r - \left(\frac{1}{\tau_{rs}} \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i \tau_{rs} \right) t_r + \frac{\beta_s}{\tau_{rs}} t_r =$$

$$= z - \left(\frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} \right) t_r,$$

и окончательный результат получается путем вычитания b из обеих частей равенства. ■

Лемма 21.2. *Если при применении правила замещения окажется, что ни одно из чисел τ_{is} не является положительным $(i = 1, \ldots, p)$, то первоначальная задача не имеет минимума.*

Доказательство.

Так как a^s вводится в новый базис, должно быть $\zeta_s > \beta_s$. Далее по определению стоящих в таблице величин мы имеем

$$c = \sum_{i=1}^{p} \eta_i a^i \tag{21.3}$$

и

$$0 = a^s - \sum_{i=1}^{p} \tau_{is} a^i. \tag{21.4}$$

Умножая (21.4) на положительное число λ и прибавляя результат к (21.3), получаем

$$c = \sum_{i=1}^{p} \eta_i a^i \tag{21.5}$$

Так как, согласно предположению, все числа τ_{is} неположительны, мы получаем новое допустимое решение исходной задачи.

Соответствующее выражение целевой функции, которую мы минимизируем, следующее

$$\lambda\beta_s + \sum_{i=1}^{p}(\eta_i - \lambda\tau_{is})\beta_i = \sum_{i=1}^{p}\eta_i\beta_i + \lambda(\beta_s - \zeta_s).$$

В последнем члене справа $\beta_s - \zeta_s$ отрицательно, а λ можно сделать сколь угодно большим; поэтому минимизируемая в задаче величина минимума не имеет. Чтобы завершить наше рассуждение, остается показать, что повторные замещения с в конце концов дадут таблицу, удовлетворяющую критерию оптимальности. Для доказательства сделаем дополнительное предположение относительно невырожденности матрицы A. Считая, что ранг матрицы A равен p, потребуем, чтобы выполнялось ■

Условие невырожденности. Невозможно выразить вектор c в виде линейной комбинации меньшего, чем p, числа столбов матрицы A.

Если это условие не выполняется, то можно изменить вектор c и получить вектор c' для которого это условие уже справедливо.

Основной результат, необходимый для доказательства сходимости процесса симплекс-метода, следующий:

Теорема 21.2. *(процесс улучшения). Если произвести замещение, то вновь полученный базис будет снова допустимым, а соответствующее значение ζ_0' целевой функции, подлежащей минимизации, будет меньше, чем прежнее значение ζ_0'.*

Доказательство. Чтобы установить допустимость нового базиса, мы должны показать, что элементы η_j' таблицы T' неотрицательны. Предположим, что вектор a^s заменяется на a^r. Тогда мы имеем

$$\eta_j' = \eta_i - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}}\eta_r, \; i \neq r. \tag{21.6}$$

Если $\tau_{is} \leqq 0$, то ясно, что $\eta_j' = 0$ (так как $\tau_{is} > 0$)
Если $\tau_{is} > 0$, то следует, что

$$\frac{\eta_i}{\tau_{is}} \geqq \frac{\eta_r}{\tau_{rs}},$$

т. е. η'_j снова неотрицательно. Далее, из леммы 21.1 известно, что

$$\zeta'_0 = \zeta_0 - \frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} \eta_r.$$

Из условия невырожденности вытекает положительность η_r (в противном случае имелось бы допустимое решение, зависящее менее, чем от p столбцов матрицы A). Величина $\zeta_s - \beta_s$ также положительна. Следовательно, $\zeta'_0 < \zeta_0$, что и завершает доказательство. ■

Полученный результат говорит о том, что после конечного числа шагов мы достигнем желаемого минимума.

§22. Нахождение начального базисного решения

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min by \\ &Ay \geqslant c \\ &y \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{22.1}$$

Рассмотрим задачу $\min \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i$ Выполним вспомогательные построения:

$$\begin{aligned} &Ay + z = c \\ &y \geqslant 0, z \geqslant 0, \end{aligned}$$

здесь $z = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Пусть $b' = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$, вектор b' содержит n нулевых компонент, и m – единиц. Введем в рассмотрение вектор $y' = (y, z)$ и матрицу $A' = (A, E)$, где E – единичная матрица порядка $m \times m$.

В новых обозначениях получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min b'y' \\ &A'y' = c \\ &y' \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{22.2}$$

Задачи 22.1 и 22.2 эквивалентны. Если вектор c имеет отрицательные компоненты, то необходимо соответствующую строку ограничений на -1. Начальное базисное решение можно взять в виде $y = 0$, $z = c$. Вектор $\eta' = (0, \ldots, 0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, с n нулевых компонент является базисным решением, так как соответствующие столбцы матрицы A' линейно независимы.

Если оказалось, что $\min \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i = 0$, то получаем, что данное базисное решение является допустимым для нашей задачи, если $\min \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i > 0$, то допустимого решения для нашей задачи не существует.